

# РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П.Н. Александров<sup>1</sup>, В.Н. Кризский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ЦГЭМИ ИФЗ РАН, alexandr@geo.igemi.troitsk.ru

<sup>2</sup> СПГУ, Горный университет, Krizskiy\_VN@pers.spmi.ru

## АННОТАЦИЯ

Теория решения обратных задач А.Н. Тихонова внесла существенный вклад в развитии геофизических исследований геологической среды, используется в настоящее время и будет использоваться для решения широкого класса обратных задач геофизики. Однако, с революционным развитием микроэлектроники, увеличением точности измерительной аппаратуры, бурным развитием компьютерных технологий Тихоновский подход становится сдерживающим фактором в развитии исследований физических параметров геологической среды, поскольку горная порода, как сложно построенный объект исследования, обладает широким набором параметров, таких как упругие параметры в Законе Гука, электрофизические параметры бианизотропных сред, флюидодинамические параметры в законе Дарси и т.п. Для таких моделей материальных уравнений, решение обратных задач в силу их большой размерности не эффективно на основе некорректно поставленных обратных задач. Необходимы новые постановки обратных задач геофизики. Как следствие, это приведет к развитию систем наблюдения, включая развитие аппаратной базы, программного обеспечения, методических приемов по решению геологических задач на более высоком уровне, а именно – к получению новой геологической информации о свойствах и строении геологической среды.

Одним из перспективных современных направлений развития теории решения обратных задач является подход, основанный на идеи М.В. Клибанова (Beilina, Klibanov, 2012). В данной статье развивается идея этого подхода, приводящая к линейному матричному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка. Излагается решение линейной обратной задачи для случая, когда расчетной формулой для поля в прямой задаче является формула объемного интегрального представления. Алгоритм этого решения может быть применен для восстановления физических свойств неоднородных и анизотропных сред для различных геофизических методов. Демонстрируются результаты вычислительных экспериментов по разработке систем наблюдения, имитирующих некоторые практические случаи.

**Ключевые слова:** линейная коэффициентная обратная задача геофизики

## ВВЕДЕНИЕ

Решения прямых задач для большинства физических полей, используемых при изучении геологической среды, могут быть сведены к решению интегральных уравнений вида (Морс, Фешбах, 1960):

$$\mathbf{X}(x, y, z, \omega) =$$

$$\iiint_V G(x', y', z', x, y, z, \omega) \Delta S(x', y', z') \mathbf{X}(x', y', z', \omega) dv +$$

$$\mathbf{X}^f(x, y, z, \omega),$$

где  $dv = dx' dy' dz'$ ,  $\mathbf{X}$  – вектор физического поля (вектор электромагнитного поля, вектор упругих полей и т.п.);  $\mathbf{X}^f(x, y, z, \omega)$  – вектор первичного поля – решение прямой задачи для среды, для

которой имеется функция Грина  $G(x', y', z', x, y, z, \omega)$ ;  $\Delta S(x, y, z)$  – избыточные значения физической величины неоднородностей, которые являются искомыми.

## Решение обратных задач геофизики на примере постоянного электрического тока.

Для определенности будем рассматривать постоянный электрический ток как наиболее простую модель потенциального физического поля. Тогда  $\Delta S(x, y, z) = S(x, y, z) - S^0$ , где  $S^0$  – удельная электропроводность вмещающей среды. Она может быть определена косвенными методами, например, через среднее кажущееся сопротивление.

В дискретном виде, разбивая интеграл на сумму, получим  $\mathbf{X}^p = G_v^p \Delta S \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_p^s$ , где индексы означают:  $p$  – точку наблюдения,  $s$  – точку

источника,  $\nu$  – точку в неоднородности;  $\Delta S$  – квадратная матрица электропроводности, имеющая вид

$$\Delta S = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_1 & [0] & \vdots & [0] \\ [0] & \Delta\sigma_2 & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & [0] & \vdots & \Delta\sigma_N \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где подматрицы  $\Delta\sigma_j = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_{11}^j & \Delta\sigma_{12}^j & \Delta\sigma_{13}^j \\ \Delta\sigma_{21}^j & \Delta\sigma_{22}^j & \Delta\sigma_{23}^j \\ \Delta\sigma_{31}^j & \Delta\sigma_{32}^j & \Delta\sigma_{33}^j \end{pmatrix}$  есть

тензоры избыточной электропроводности  $j$ -го элемента объёма всей неоднородности  $V$ , состоящей из  $N$  элементов;  $\mathbf{X}_p^s$  – первичное поле от источника в точке наблюдения;  $\mathbf{X}_v$  – поле в неоднородности;  $\mathbf{X}^p$  – поле в точке наблюдения (как разность потенциалов);  $G_v^p$  – передаточная матрица от неоднородности в точку наблюдения, размерности  $K \times 3N$ ,  $K$  – количество точек наблюдения.

Найдем поле в неоднородностях  $\mathbf{X}_v = G_v^v \Delta S \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_v^s$ , тогда  $\mathbf{X}_v = ([I] - G_v^v \Delta S)^{-1} \mathbf{X}_v^s$ .

Отсюда

$$\mathbf{X}^p = G_v^p \Delta S \mathbf{X}_v + \mathbf{X}_p^s = G_v^p \Delta S ([I] - G_v^v \Delta S)^{-1} \mathbf{X}_v^s + \mathbf{X}_p^s.$$

Здесь  $\mathbf{X}_v^s$  – поле от источника в неоднородность, вычисляется через функцию Грина вмещающей среды,  $\mathbf{X}_p^s$  – первичное поле в точке наблюдения, вычисляется через функцию Грина вмещающей среды.

Или для конкретного источника

$$\mathbf{X}_k^p = G_v^p \Delta S ([I] - G_v^v \Delta S)^{-1} \mathbf{X}_v^{s_k} + \mathbf{X}_p^{s_k} = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} \mathbf{X}_v^{s_k} + \mathbf{X}_p^{s_k},$$

где  $k$  – номер источника и воспользовались правилом  $(AB^{-1}) = (BA^{-1})^{-1}$ .

Используя дополнительные источники, введем составные матрицы

$$X = [\mathbf{X}_1^p, \mathbf{X}_2^p, \mathbf{X}_3^p, \dots],$$

$$Y = [\mathbf{X}_v^{s_1}, \mathbf{X}_v^{s_2}, \mathbf{X}_v^{s_3}, \dots],$$

$$Z = [\mathbf{X}_p^{s_1}, \mathbf{X}_p^{s_2}, \mathbf{X}_p^{s_3}, \dots].$$

Перейдем от векторной системы уравнений к матричной

$$X = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y + Z.$$

Для переопределенной и нормально определенной системы из цепочки уравнений

$$X = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y + Z,$$

$$X - Z = G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y,$$

$$G_v^{pT} (X - Z) = G_v^{pT} G_v^p (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y,$$

$$(G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = (\Delta S^{-1} - G_v^v)^{-1} Y,$$

$$(\Delta S^{-1} - G_v^v) (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = Y$$

получим

$$\Delta S^{-1} (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = Y + G_v^v (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) \quad (7)$$

Размерности матриц, входящих в последнюю систему уравнений, следующие:  $[Z]_{m \times n}$ ,  $[X]_{m \times n}$ ,

где  $m$  – количество приемников с учетом размерности измеренного вектора в точке наблюдения,  $n$  – количество источников с учетом размерности вектора стороннего тока в точке источника;  $[Y]_{k \times n}$ ,  $[\Delta S]_{k \times k}$ ,  $[G_v^p] = m \times k$ ,  $[G_v^{pT}]_{k \times m}$ , где  $k$  – количество неоднородностей с учетом их размерности. Тогда

$$[(G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z)]_{((k \times m)(m \times k))^{-1} (k \times m)(m \times n)} = [(G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z)]_{k \times n}.$$

Перепишем (7) в виде  $\Delta S^{-1} A = B$ , где  $A = (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = \{a_{ij}\}$ ,

$$B = Y + G_v^v (G_v^{pT} G_v^p)^{-1} G_v^{pT} (X - Z) = \{b_{ij}\}.$$

Последнее уравнение с учетом представления (6) разбивается на отдельные уравнения по следующей схеме

$$\begin{pmatrix} \Delta\sigma_1^{-1} & [0] & \vdots & [0] \\ [0] & \Delta\sigma_2^{-1} & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ [0] & [0] & \vdots & \Delta\sigma_N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2M} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \vdots & a_{NM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2M} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \vdots & b_{NM} \end{pmatrix}.$$

Отсюда нахождение искоемых параметров разбивается на решение отдельных систем матричных уравнений

$$\Delta\sigma_1^{-1} (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1M}) = (b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{1M}),$$

$$\Delta\sigma_2^{-1} (a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2M}) = (b_{21} \ b_{22} \ \dots \ b_{2M}),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta\sigma_N^{-1} (a_{N1} \ a_{N2} \ \dots \ a_{NM}) = (b_{N1} \ b_{N2} \ \dots \ b_{NM}).$$

Подматрицы  $a_{ij}$  имеют размеры  $3 \times 1$ ,  $M$  – количество источников. Для разрешимости каждого из этих уравнений необходимо минимум 3 источника.

В соответствии с полученным решением обратной задачи разработан алгоритм и программное обеспечение, позволяющее моделировать систему наблюдения.

**Алгоритм моделирования систем наблюдения для решения обратной задачи в методе постоянного электрического тока.**

Для подбора систем геофизических наблюдений при решении геологических задач разработана компьютерная программа (Александров,

Кризский, 2017), моделирующая системы наблюдения. Это позволяет перейти к корректной постановке задач в смысле существования, единственности, устойчивости ее решения. Эти вопросы непосредственно связаны с системой наблюдения – при одной системе наблюдения обратная задача будет некорректной, при другой – корректно поставленной.

Программа базируется на следующем алгоритме определения системы наблюдения для решения обратной задачи в линейной постановке:

1. решение прямой задачи при заданной системе наблюдения и предполагаемой модели среды;
2. решение обратной задачи – восстановление физических параметров среды при заданной системе наблюдения на основе решения полученной прямой задачи;
3. решение прямой задачи с найденными по обратной задаче физическими параметрами среды;
4. оценка точности измерений и точности решения обратной задачи при выбранной системе наблюдения. Если решение обратной задачи не удовлетворяет требованиям решения геологической задачи по точности определения физических свойств горной породы, то необходимо вернуться к первому пункту и модифицировать систему наблюдения.

#### Пример решения задачи на основе моделирования систем наблюдения.

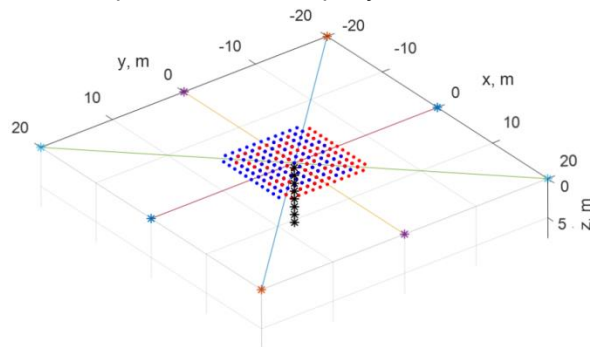
В методе постоянного электрического тока используют круговые вертикальные электрические зондирования (ВЭЗ) для изучения анизотропных электрических свойств геологической среды (Изучение..., 2012). При этом используют симметричные относительно центра установки типа Шлюмберже, Винера и др. Поворот данной установки вокруг ее центра по азимуту позволяет получать информацию об анизотропии кажущегося электрического сопротивления. При этом важную роль играют источники – заземления питающих электродов, располагающиеся симметрично.

Для анализа данной системы наблюдения рассмотрим задачу об определении анизотропии электропроводности в модели «колодец». Данный объект представляет вертикально внедренное в нижнее однородное изотропное полупространство с удельной электропроводностью  $1/30$  См/м, анизотропное проводящее тело с тензором электропроводности

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0.0115 & -0.0037 & -0.0037 \\ -0.0037 & 0.0141 & -0.0026 \\ -0.0037 & -0.0026 & 0.0141 \end{pmatrix}.$$

Размеры этого тела  $1\text{ м} \times 1\text{ м} \times 7\text{ м}$ , т.е. тело простирается на  $7\text{ м}$  вниз.

Рассмотрим пример с симметричной системой наблюдения. Симметричной в том смысле, что источники, «освещающие» неоднородность, расположены симметрично относительно центра «колодца». Система наблюдения и объект представлены на рисунке 1.

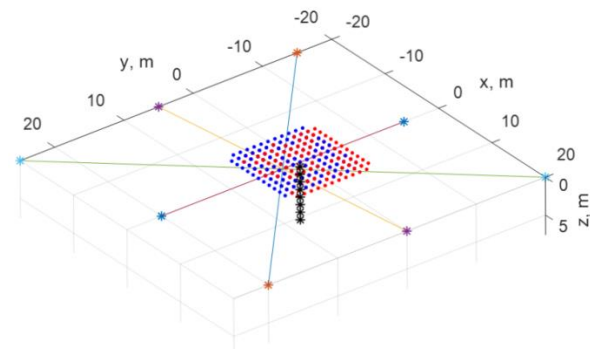


**Рисунок 1.** Симметричная система наблюдения и объект исследования. Звездочки, соединенные линиями – питающие электроды, точки – приемные электроды, звездочки черного цвета – центры неоднородностей.

Результаты моделирования системы наблюдения по указанному выше алгоритму приведены ниже.

Среднеквадратическое отклонение рассчитанного поля по данным решения обратной задачи от исходного поля для каждого источника, состоящего из пары заземленных электродов (в %):  $7.437\text{e-}08$ ,  $1.569\text{e-}07$ ,  $1.264\text{e-}06$ ,  $1.512\text{e-}07$ . Величина среднеквадратического отклонения по электропроводности (в %):  $51.126$ . Таким образом, при такой системе наблюдения точность решения обратной задачи относительно тензора анизотропии электропроводности оказывается невысокой – около  $51\%$ .

Рассмотрим систему наблюдения асимметричную относительно изучаемого объекта, которая представлена на рисунке 2.



**Рисунок 2.** Асимметричная система наблюдения и объект исследования. Звездочки, соединенные линиями – питающие электроды, точки – приемные электроды, звездочки черного цвета – центры неоднородностей.

цвета – центры неоднородностей.

Среднеквадратическое отклонение рассчитанного поля по данным решения обратной задачи от исходного поля для каждого источника, состоящего из пары заземленных электродов (в %):  $8.625e-07$ ,  $8.338e-07$ ,  $2.741e-05$ ,  $6.315e-07$ . Величина среднеквадратического отклонения по электропроводности (в %): 2.152. Как следует из результатов моделирования, тензор удельной электропроводности восстанавливается с удовлетворительной точностью – примерно 2%. Отсюда следует вывод, что изучение анизотропных свойств геологической среды в плане решения обратной задачи, симметричные установки оказываются неудачными: отличие по полю – не значительно, а различие по электропроводности – существенно. Отсюда следует, что для определения тензора анизотропии электропроводности объекта «колодец» необходимо использовать ассиметричные установки.

#### **Выводы**

1. Рассмотренный подход к решению обратных задач геофизики приводит к решению линейных алгебраических уравнений, что упрощает анализ устойчивости, точности и разрешающей способности геофизических методов по решению геологических задач.
2. Единственным требованием к данной постановке обратных задач является требование линейности материальных уравнений.
3. Новизной данного подхода является использование таких типов источников и такого их количества, которые позволяют сформулировать линейную постановку обратных задач геофизики.
4. На основе изложенного алгоритма появляется возможность автоматизации подбора системы наблюдения для решения обратных задач геофизики в линейной постановке.

Исследования выполнены в рамках гос. задания ИФЗ им. О.Ю. Шмидта РАН

№ АААА-А17-117060110209-6.

#### **Литература**

Александров ПН, Кризский ВН, 2017 Моделирование систем наблюдения электроразведки постоянным током для исследования неоднородных анизотропных сред. Роспатент, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ, RU 2017615842.

Изучение анизотропии в методе сопротивлений. 2012, Под ред. проф. ВА Шевнина. Учебное пособие. М.: МГУ, 248 с.

Beilina L, Klivanov MV, 2012, Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. Springer. New York. Dordrecht. Heidelberg. London 407 p.